Prova Escrita de Matemática

11.º Ano de Escolaridade – Turma A

Duração da Prova : 100 minutos **VERSÃO 1** 07 de fevereiro de 2020

- **Para cada uma das questões de escolha múltipla:**
  - são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
  - escreva na sua folha de respostas **apenas** a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
  - se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Para cada uma das questões de resposta aberta:**
  - apresente analiticamente o seu raciocínio de forma clara, indicando os cálculos e todas as justificações necessárias.
  - quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se o valor exato.
  - utilize a calculadora apenas quando sugerido ou para efetuar eventuais cálculos.

1. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

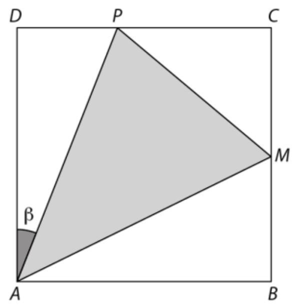
(A) $\forall\, \alpha_1,\ \alpha_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \ \alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha_1 > \operatorname{sen}\alpha_2$

(B) $\forall\, \alpha_1,\ \alpha_2 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ \ \alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow \cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$

(C) $\exists\, \alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\ :\ \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2020}\ \wedge\ \cos\alpha = \frac{2019}{2020}$

(D) $\exists\, \alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\ :\ \operatorname{tg}\alpha = 2020$

2. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 2.



Sabe-se que:

- O ponto M é o ponto médio de $[BC]$.
- O ponto P desloca-se sobre o lado $[CD]$ e, para cada posição do ponto P, considere β a amplitude do ângulo PAD $\left(\beta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.

2.1. Mostre que a área do triângulo $[AMP]$ é dada, em função de β, por:

$$A(\beta) = 2 - \operatorname{tg}\beta$$

2.2. Considere agora as funções reais de variável real f e g definidas por:

$$f(x) = 2 - \operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad g(x) = 2.\operatorname{sen}x\ \operatorname{tg}x + 2$$

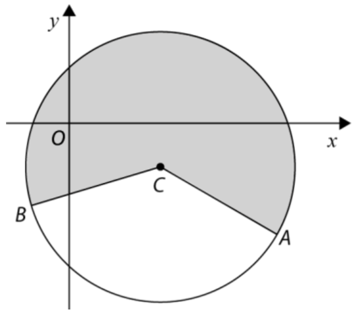
Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

3. Sabe-se que uma reta r passa pelos pontos de coordenadas $E(a, b)$ e $F(-a, -b)$, onde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. O declive da reta r é:

(A) $\frac{b}{a}$ **(B)** $-\frac{b}{a}$ **(C)** $\frac{a}{b}$ **(D)** $-\frac{a}{b}$

4. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro C que pode ser definida por:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=10$$



Sabe-se que A e B são dois pontos da circunferência e que a área da região sombreada é $\frac{20\pi}{3}$.

4.1. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$?

(A) $-50\sqrt{3}$ **(B)** -5 **(C)** $5\sqrt{3}$ **(D)** 5

4.2. Considere também o ponto D, ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo das abcissas.
Determine a equação reduzida da reta t, reta tangente à circunferência no ponto D.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular reto.

Sabe-se que uma das bases do prisma está contida no plano α de equação $-x+\frac{5}{2}y+z-\frac{47}{2}=0$ e que a outra base está contida no plano β que contém o ponto A de coordenadas $(1,2,3)$.

5.1. Em qual das opções se encontra uma condição que define o plano β?

(A) $2x-5y-2z+14=0$

(B) $5x-2y+2z-7=0$

(C) $-x+\frac{5}{2}y+z+7=0$

(D) $4x-10y-4z+14=0$

5.2. Escreva a equação vetorial da reta r perpendicular ao plano α e que passa em A .

5.3. Determine o ponto de interseção da reta r com o plano α .

6. Para um determinado valor real a, considere a sucessão (u_n) definida por: $\begin{cases} u_1=a \\ u_{n+1}=\frac{1-u_n}{2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $\frac{1-a}{2}$

(B) $\frac{1+a}{2}$

(C) $\frac{1+a}{4}$

(D) $\frac{1-a}{4}$

7. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n=\frac{2n+5}{n+1}$.

7.1. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

7.2. Prove que a sucessão (u_n) é limitada.

FIM

Cotações	Questões	1	2.1	2.2	3	4.1	4.2	5.1	5.2	5.3	6	7.1	7.2	**Total**
	Pontos	8	20	25	8	8	25	8	20	25	8	25	20	**200**

Soluções: **2.2.** $x=k\pi \ \lor\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \lor\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$; **4.2.** $y=-3x+15$;
5.2. $(x,y,z)=(1,2,3)+k\left(-1,\frac{5}{2},1\right), k\in\mathbb{R}$; **5.3.** $(-1,7,5)$; **7.1** (u_n) é monótona decrescente ; **7.2.** $2<u_n\le\frac{7}{2}, \forall n\in\mathbb{N}$.

xism@t.net

Professor: Carlos Manuel Lourenço

Rua Mabília da Natividade de Freitas Martins, Apartado 13
7440 – 020 Alter do Chão

Tel.: 245 612 371
Fax: 245 613 211
e-mail: epjaralter@gmail.com

Projeto ALT20-02-5266-FSE-000005 cofinanciado por:
ALENTEJO 2020 PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu