Prova Escrita de Matemática

12.º Ano de Escolaridade – Turma A

Duração da Prova : 100 minutos **VERSÃO 1** 7 de Dezembro de 2018

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova. A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o grupo I.

GRUPO I

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas** a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Cada resposta certa será cotada com + 5 pontos; cada resposta errada será cotada com zero pontos; cada questão não respondida ou anulada será cotada com zero pontos.

1. Sejam A e B subconjuntos de um universo U tais que $A \cap B = \varnothing$. Pode-se concluir que:

(A) $A \subset \overline{B}$ **(B)** $A \cup B = U$ **(C)** $B | A = \varnothing$ **(D)** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = U$

2. Numa escola, cinco raparigas e três rapazes, vão participar na festa de Natal. Cada um tem um poema para recitar.

De quantas maneiras pode ser feito o alinhamento dos poemas de modo que os três rapazes não estejam em ordens consecutivas?

(A) 39 600 **(B)** 4 320 **(C)** 36 000 **(D)** 25 920

3. Na figura estão representadas cinco cartas, entre elas dois ases: o ás de ouros e o ás de paus.
As cinco cartas vão ser baralhadas e dispostas, ao acaso, lado a lado.

A probabilidade de os dois ases ficarem lado a lado é igual a:

(A) $\dfrac{^5C_2}{5!}$ **(B)** $\dfrac{4! \times 2!}{5!}$

(C) $\dfrac{^5A_2}{5!}$ **(D)** $\dfrac{^5C_2}{2! \times 3!}$

4. Um saco tem v bolas vermelhas e a bolas amarelas. Extraem-se, sucessivamente e ao acaso, duas bolas do saco, **não repondo a primeira bola antes de retirar a segunda**.

Sejam os acontecimentos:

V_1 : “A bola retirada na primeira extração é vermelha”.

V_2 : “A bola retirada na segunda extração é vermelha”.

Qual das expressões seguintes dá o valor da probabilidade condicionada $P(V_2 / V_1)$?

(A) $\dfrac{v-1}{v+a}$ **(B)** $\dfrac{v}{v+a-1}$ **(C)** $\dfrac{v-1}{a-1}$ **(D)** $\dfrac{v-1}{v+a-1}$

5. Sejam A e B dois acontecimentos de um espaço amostral E tais que:

- $P(A)=k$
- $P(B)=k+0,1$
- $P(A\cup B)=0,8$

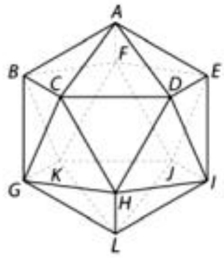
Qual é o valor de k para o qual os acontecimentos A e B são independentes?

(A) 1,4 **(B)** 1 **(C)** 0,5 **(D)** 0,2

GRUPO II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando os cálculos e todas as justificações necessárias. Quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se o valor exato.

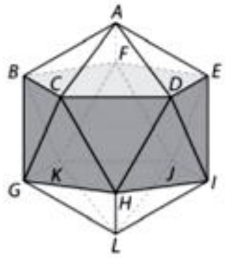
1. Na figura está representado o icosaedro $[ABCDEFGHIJKL]$.



1.1. Do conjunto das 12 letras, utilizadas para designar os vértices do icosaedro, vão escolher-se 3 vogais e 3 consoantes, ao acaso, para formar uma sequência.

Determine o número de maneiras diferentes de, nessa sequência, as vogais e as consoantes ficarem colocadas alternadamente.

1.2. A Helena tem uma caixa de lápis de cor com 18 cores diferentes, entre as quais a amarela. Ela pretende pintar todas as 20 faces do icosaedro, podendo qualquer cor colorir qualquer face.
Já coloriu de amarelo as 10 faces a sombreado na figura.



Determine a probabilidade de nenhuma das restantes faces do icosaedro ficar de amarelo mas todas coloridas com cores distintas.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

2. Seja E um espaço amostral finito e sejam C e D dois acontecimentos, contidos em E, ambos com probabilidade não nula.

Prove que:

$$P\left[\left(\overline{\overline{C}\cap D}\right)/\,D\right]=P\left(C\,/\,D\right).$$

3. Para testar a eficácia de uma vacina no tratamento de uma determinada doença, 100 voluntários foram vacinados e outros 100 não foram vacinados.

- Dos que foram vacinados, 68 ficaram curados.
- Houve 38 voluntários que não foram vacinados e que continuaram doentes.

Determine a probabilidade de um voluntário não ter sido vacinado, sabendo que ficou curado.

Apresente o resultado em percentagem arredondado às unidades.

4. Considere duas caixas A e B. A caixa A contém 6 bolas, das quais 4 são amarelas e as restantes são azuis. A caixa B contém 8 bolas, sendo algumas amarelas e as outras azuis.

Lançou-se uma moeda ao ar. Se sair face nacional, retira-se uma bola da caixa A. Se sair face europeia, retira-se uma bola da caixa B.

Sejam X e Y os acontecimentos:

X : "Sair face europeia na moeda".

Y : "Sair bola azul".

Sabe-se que $P(Y|X)=\frac{1}{4}$. Quantas bolas de cada cor estão inicialmente na caixa B?

Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por:

- explicar o significado de $P(Y|X)$, no contexto da situação descrita.
- explicar o número de casos favoráveis.
- explicar o número de casos possíveis.
- fazer referência à Regra de Laplace.

5. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) tais que:

- $\lim u_n = -\infty$.
- para $n>100$, $v_n \geq \frac{n^2 - n.u_n}{n}$.

Determine, **por métodos exclusivamente analíticos**, o limite de v_n.

6. Considera a função f, de domínio ¡ , definida por: $f(x)=\frac{4-sin(2x)}{x^2+1}$.

6.1. Determine as expressões algébricas de duas funções g e h tais que:

- $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

6.2. Recorrendo a 6.1., determine e justifique o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

FIM

Cotações

	Grupo I	Grupo II								
Questões	5 pontos cada questão	1.1	1.2	2	3	4	5	6.1	6.2	**Total**
Pontos	25	18	20	24	26	25	22	20	20	**200**

Soluções: **1.1.** 6048; **1.2.** 0,020 ; **3.** 48 % ; **5.** $+\infty$; **6.1.** $g(x)=\frac{3}{x^2+1}$ e $h(x)=\frac{5}{x^2+1}$; **6.2.** 0

Rua Mabília da Natividade de Freitas Martins, Apartado 13
7440 – 020 Alter do Chão

Tel.: 245 612 371
Fax: 245 613 211
e-mail: epjaralter@gmail.com

Projeto ALT20-02-5266-FSE-000005 cofinanciado por: ALENTEJO 2020, PORTUGAL 2020, UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu