



**Prova Escrita de Matemática**

12º Ano de Escolaridade – Turma A

Duração da Prova : 100 minutos

**VERSÃO 1**

25 de janeiro de 2019

**GRUPO I**

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla. Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas** a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Cada resposta certa será cotada com + 5 pontos; cada resposta errada será cotada com zero pontos; cada questão não respondida ou anulada será cotada com zero pontos.

1. Uma escola dedica-se ao ensino de Espanhol e de Inglês, entre outras línguas.

Doze alunos dessa escola, quatro de Espanhol e oito de Inglês, dispõem-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos?

- (A) 40320                      (B) 80640                      (C) 967680                      (D) 1935360

2. Em cada uma das seguintes opções A, B, C e D, estão representados cartões, divididos em seis quadrados, com os números 1 ou 2, que estão pintados de branco ou preto.

Para cada opção, considere:

- A experiência que consiste na escolha aleatória de um dos seis quadrados.
- Os acontecimentos:

$X$  : " O número escolhido é o 1".

$Y$  : " O quadrado está pintado de preto".

Em qual das opções se tem  $P(Y/X) = \frac{2}{3}$ .

(A)

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |

(B)

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |

(C)

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |

(D)

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |

3. Sabe-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+2k} \right)^n = \sqrt{e}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Qual é o valor de  $k$  ?

- (A)  $\sqrt{2}$                       (B)  $-\frac{3}{4}$                       (C)  $\frac{1}{2}$                       (D)  $-\frac{1}{2}$

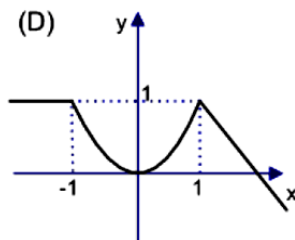
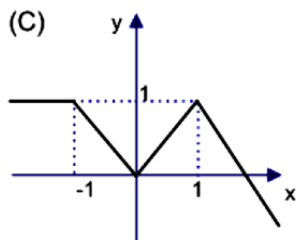
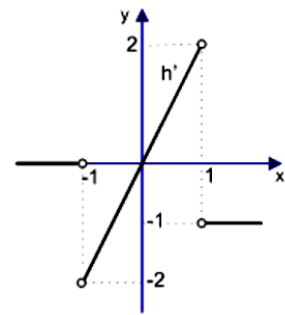
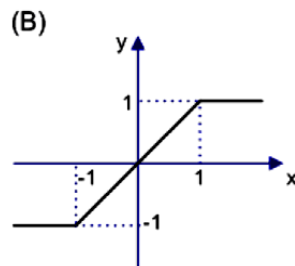
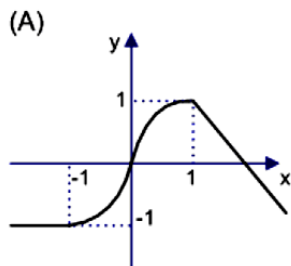
4. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ . A reta de equação  $y = 2x - 1$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1.

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2 - [f(1)]^2}{x - 1}$  ?

- (A) 4                      (B) 3                      (C) 2                      (D) 1

5. Na figura ao lado está parte do gráfico da função  $h'$ , **derivada** de uma função  $h$ .

Em qual das figuras seguintes pode estar parte do gráfico de  $h$ ?



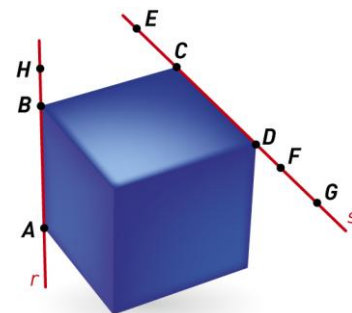
**GRUPO II**

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando os cálculos e todas as justificações necessárias. **Quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se o valor exato.**

1. Na figura está representado um cubo, duas retas  $r$  e  $s$  e oito pontos  $A, B, C, D, E, F, G$  e  $H$ .

Sabe-se que:

- os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são vértices do cubo.
- os pontos  $A, B$  e  $H$  pertencem à reta  $r$ .
- os pontos  $C, D, E, F$  e  $G$  pertencem à reta  $s$ .



1.1. Determine o número de triângulos distintos que é possível definir com os oito pontos.

1.2. Escolhe-se ao acaso um dos triângulos definidos em 1.1.

Determine a probabilidade dos vértices do triângulo escolhido coincidirem com os vértices do cubo.

2. Considere as funções  $f$  e  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definidas por  $f(x) = 4^{x+1} - \frac{1}{2}$  e  $g(x) = 2^x$ .

**Por processos exclusivamente analíticos**, resolva as seguintes condições.

2.1.  $f(x) \leq 0$ . Apresente a solução na forma de intervalo de números reais.

2.2.  $f(x) = g(x)$ .

3. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{3}{2}(3^x - 2)$ .

Determine, **analiticamente**, o contradomínio de  $f$ .

4. Seja  $k \in \mathbb{R}$  e  $f$  a função definida por  $f(x) = e^x + k$ .

Para um certo valor de  $k$ , o Teorema de Bolzano garante a existência de um zero da função  $f$  no intervalo  $]0, 1[$ .

Determine o intervalo de números reais a que pertence  $k$ .

5. Considere as funções  $f$  e  $g$ , definidas, em  $\mathbb{R}^+$ , por  $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 3x}{x^2 + x}$  e  $g(x) = \frac{e^{4x} - e^x}{x}$ .

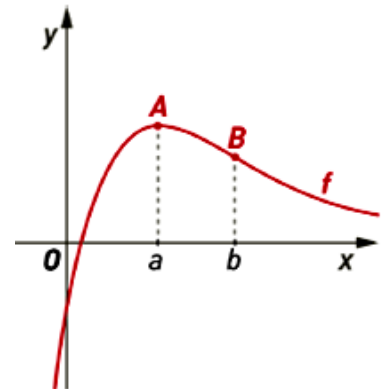
Sabe-se que uma função  $h$  é tal que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) < h(x) < g(x)$ .

Determine o  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .

6. Na figura, em referencial ortonormado  $xOy$ , está representada a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{5x - 1}{e^x}$ .

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao gráfico de  $f$ , tem abcissa  $a$  e a ordenada é máximo absoluto da função;
- o ponto  $B$  tem abcissa  $b$  e é ponto de inflexão do gráfico de  $f$ .
- A medida do lado de um quadrado é  $b - a$ .



Determine, **analiticamente**, a medida de cada uma das diagonais desse quadrado.

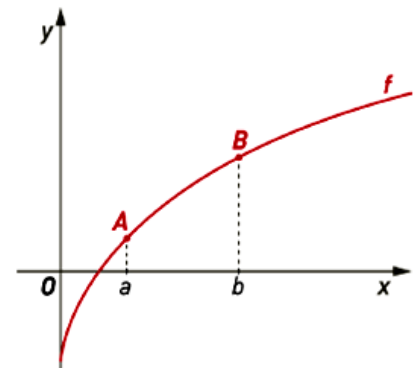
7. Na figura, em referencial ortonormado  $xOy$ , está representada a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}_0^+$ , definida por  $f(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$ .

Os pontos  $A$  e  $B$ , de abcissas respetivamente,  $a$  e  $b$ , pertencem ao gráfico de  $f$  e a ordenada de cada um deles é igual a metade da respetiva abcissa.

Recorra às capacidades gráficas da calculadora para determinar o valor da diferença  $b - a$ . Apresente o resultado arredondado às décimas.

Na sua resolução deve apresentar:

- a equação que traduz a relação entre as ordenadas e as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$ ;
- o gráfico ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- os pontos  $A$  e  $B$  e os valores das respetivas abcissas arredondados às milésimas;
- o valor da diferença  $b - a$ , arredondado às décimas.



FIM

| Grupo | Questões | 1.1 | 1.2 | 2.1 | 2.2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | Total |
|-------|----------|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-------|
| II    | Pontos   | 10  | 20  | 15  | 28  | 10 | 24 | 22 | 30 | 16 | 175   |

Soluções: 1.1. 45; 1.2.  $\frac{4}{45}$ ; 2.1.  $]-\infty, -\frac{3}{2}]$ ; 2.2. -1; 3.  $]-3, +\infty[$ ; 5. 3; 6.  $\sqrt{2}$  7. 3,2



Professor: Carlos Manuel Lourenço