



Prova Escrita de Matemática

12º Ano de Escolaridade – Turma A

Duração da Prova : 100 minutos

VERSÃO 1

25 de janeiro de 2019

GRUPO I

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla. Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas** a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Cada resposta certa será cotada com + 5 pontos; cada resposta errada será cotada com zero pontos; cada questão não respondida ou anulada será cotada com zero pontos.

1. Uma escola dedica-se ao ensino de Espanhol e de Inglês, entre outras línguas.

Doze alunos dessa escola, quatro de Espanhol e oito de Inglês, dispõem-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos?

- (A) 40320 (B) 80640 (C) 967680 (D) 1935360

2. Em cada uma das seguintes opções *A*, *B*, *C* e *D*, estão representados cartões, divididos em seis quadrados, com os números 1 ou 2, que estão pintados de branco ou preto.

Para cada opção, considere:

- A experiência que consiste na escolha aleatória de um dos seis quadrados.
- Os acontecimentos:

X : “ O número escolhido é o 1”.

Y : “ O quadrado está pintado de preto”.

Em qual das opções se tem $P(Y/X) = \frac{2}{3}$.

(A)

2	1	1
1	1	2

(B)

1	1	2
2	2	1

(C)

2	2	1
1	1	2

(D)

1	2	1
1	2	1

3. Sabe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+2k}\right)^n = \sqrt{e}$, $k \in \mathbb{R}$. Qual é o valor de *k* ?

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

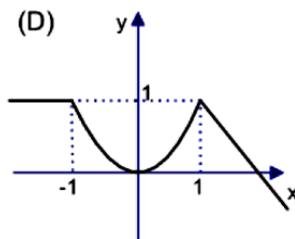
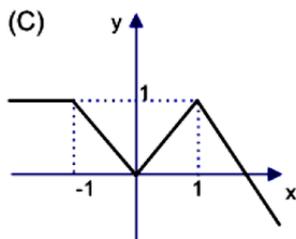
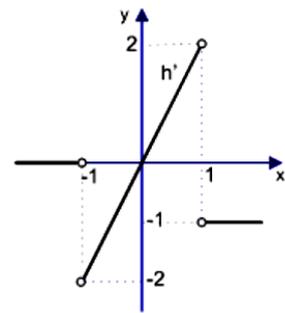
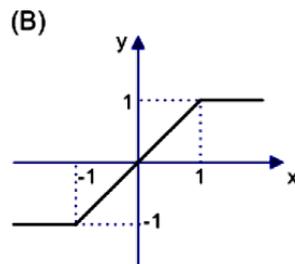
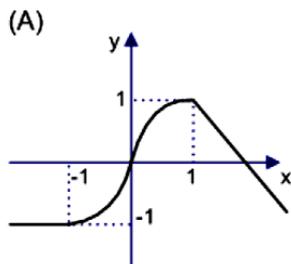
4. Seja *f* uma função de domínio \mathbb{R} . A reta de equação $y = 2x - 1$ é tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2 - [f(1)]^2}{x - 1}$?

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

5. Na figura ao lado está parte do gráfico da função h' , **derivada** de uma função h .

Em qual das figuras seguintes pode estar parte do gráfico de h ?



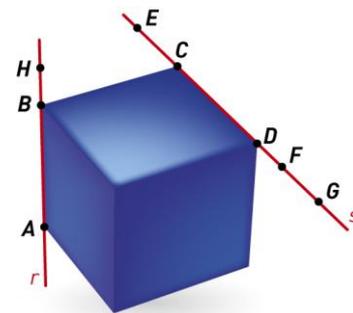
GRUPO II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando os cálculos e todas as justificações necessárias. **Quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se o valor exato.**

1. Na figura está representado um cubo, duas retas r e s e oito pontos A, B, C, D, E, F, G e H .

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D são vértices do cubo.
- os pontos A, B e H pertencem à reta r .
- os pontos C, D, E, F e G pertencem à reta s .



1.1. Determine o número de triângulos distintos que é possível definir com os oitos pontos.

1.2. Escolhe-se ao acaso um dos triângulos definidos em 1.1.

Determine a probabilidade dos vértices do triângulo escolhido coincidirem com os vértices do cubo.

2. Considere as funções f e g , de domínio \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 4^{x+1} - \frac{1}{2}$ e $g(x) = 2^x$.

Por processos exclusivamente analíticos, resolva as seguintes condições.

2.1. $f(x) \leq 0$. Apresente a solução na forma de intervalo de números reais.

2.2. $f(x) = g(x)$.

3. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \frac{3}{2}(3^x - 2)$.

Determine, **analiticamente**, o contradomínio de f .

4. Seja $k \in \mathbb{R}$ e f a função definida por $f(x) = e^x + k$.

Para um certo valor de k , o Teorema de Bolzano garante a existência de um zero da função f no intervalo $]0, 1[$.

Determine o intervalo de números reais a que pertence k .

5. Considere as funções f e g , definidas, em \mathbb{R}^+ , por $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 3x}{x^2 + x}$ e $g(x) = \frac{e^{4x} - e^x}{x}$.

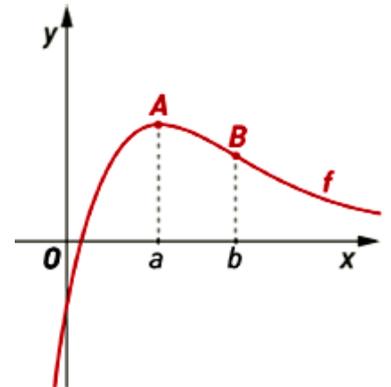
Sabe-se que uma função h é tal que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) < h(x) < g(x)$.

Determine o $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

6. Na figura, em referencial ortonormado xOy , está representada a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \frac{5x - 1}{e^x}$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f , tem abcissa a e a ordenada é máximo absoluto da função;
- o ponto B tem abcissa b e é ponto de inflexão do gráfico de f .
- A medida do lado de um quadrado é $b - a$.



Determine, **analiticamente**, a medida de cada uma das diagonais desse quadrado.

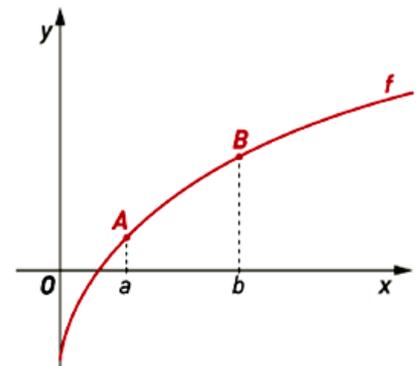
7. Na figura, em referencial ortonormado xOy , está representada a função f , de domínio \mathbb{R}_0^+ , definida por $f(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$.

Os pontos A e B , de abcissas respetivamente, a e b , pertencem ao gráfico de f e a ordenada de cada um deles é igual a metade da respetiva abcissa.

Recorra às capacidades gráficas da calculadora para determinar o valor da diferença $b - a$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Na sua resolução deve apresentar:

- a equação que traduz a relação entre as ordenadas e as abcissas dos pontos A e B ;
- o gráfico ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- os pontos A e B e os valores das respetivas abcissas arredondados às milésimas;
- o valor da diferença $b - a$, arredondado às décimas.



FIM

Grupo	Questões	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5	6	7	Total
II	Pontos	10	20	15	28	10	24	22	30	16	175

Soluções: 1.1. 45; 1.2. $\frac{4}{45}$; 2.1. $]-\infty, -\frac{3}{2}]$; 2.2. -1; 3. $]-3, +\infty[$; 5. 3; 6. $\sqrt{2}$ 7. 3,2



Professor: Carlos Manuel Lourenço