Prova Escrita de Matemática

12.º Ano de Escolaridade – Turma A

Duração da Prova : 100 minutos **Versão 1** 15 de Junho de 2020

- **Para cada uma das questões de escolha múltipla:**
  - são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
  - escreva na sua folha de respostas **apenas** a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
  - se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Para cada uma das questões de resposta aberta:**
  - apresente analiticamente o seu raciocínio de forma clara, indicando os cálculos e todas as justificações necessárias.
  - quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se o valor exato.
  - utilize a calculadora apenas quando sugerido ou para efetuar eventuais cálculos.

1. Numa caixa há 16 bolas numeradas de 1 a 16.
As bolas com número ímpar são azuis. As bolas com número par, umas são vermelhas e as restantes são pretas.

1.1. As bolas azuis são colocadas, lado a lado, constituindo uma sequência numérica, com 8 termos.
Determine o número de sequências diferentes que é possível representar se os termos formados pelos números de dois algarismos ocuparem ordens consecutivas.

1.2. Da caixa com as 16 bolas, são retiradas, sucessivamente e sem reposição, duas bolas ao acaso.
Considere os acontecimentos:

A: “a primeira bola extraída é azul”;
B: “a segunda bola extraída é preta”.

Sabe-se que $P\,(B|A) = 0{,}2$.

Determine o número de bolas vermelhas existentes na caixa.

2. Considere a linha do triângulo de Pascal cujo segundo elemento é 2018. Escolhendo, ao acaso, dois elementos dessa linha, qual é a probabilidade do seu produto ser inferior a 10 000 ?

(A) $\dfrac{2}{2\,037\,171}$ **(B)** $\dfrac{5}{2\,037\,171}$ **(C)** $\dfrac{6}{2\,035\,153}$ **(D)** $\dfrac{12}{2\,035\,153}$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x} + 6\,e^{-x} - 5$.

Determine, analiticamente, os valores de x para os quais a função f é positiva.

4. Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 1$. A expressão $(\ln(a^3) + \ln(a^4) + \ln(a^5)) \times (\ln 36)^{-1}$ é igual a :

(A) $6\log_6(a)$ **(B)** $-6\log_{36}(a)$ **(C)** $6\ln\left(\frac{a}{6}\right)$ **(D)** $-24\ln(6a)$

5. Considere a função f, definida em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, por: $f(x) = 1 + \cos x$.

Considere as seguintes proposições p e q:

p: "f pode ser definida por $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + \cos x$".

q: "Na restrição definida, o contradomínio da função f é $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$".

Em relação ao valor lógico das proposições, podemos concluir que:

(A) são ambas verdadeiras

(B) são ambas falsas

(C) apenas p é verdadeira

(D) apenas q é verdadeira

6. Para cada número real k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)}{2x} - k^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ -4 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

6.1. Determine os valores reais de k de modo que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) < f(0)$.

6.2. Considere agora $k = 2$.
Estude o gráfico da função f quanto à existência de assíntotas horizontais, e, caso existam, escreva as suas equações.

6.3. Recorrendo à definição de derivada de uma função, determine o valor da derivada da função f no ponto de abcissa 1.

7. Seja f a função definida por: $f(x) = \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x$.

7.1. Para qualquer valor real de x, $f(\pi + x) + f\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)$ é igual a:

(A) $1 + 2\operatorname{sen} x + 2\cos x$

(B) $-1 + 2\operatorname{sen} x + 2\cos x$

(C) $1 - 2\operatorname{sen} x - 2\cos x$

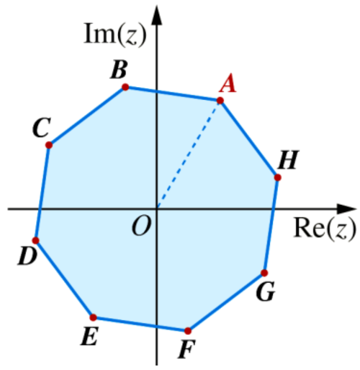
(D) $-1 - 2\operatorname{sen} x - 2\cos x$

7.2. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]0, \frac{5\pi}{6}\right[$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso este(s) exista(m).

8. Na figura ao lado, no plano complexo, está representado um octógono regular [*ABCDEFGH*] de centro no ponto *O*.



Sabe-se que o vértice *A* é a imagem geométrica do número complexo $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

8.1. O vértice C é o simétrico do vértice A em relação a um eixo *r*.
O eixo *r* é definido pela condição:

(A) $|z-1+\sqrt{3}i| = |z+1-\sqrt{3}i|$ **(B)** $|z-1-\sqrt{3}i| = |z+\sqrt{3}-i|$

(C) $|z-\sqrt{3}+i| = |z+1-\sqrt{3}i|$ **(D)** $|z+\sqrt{3}-i| = |z-\sqrt{3}-i|$

8.2. Sejam z_B e z_H os números complexos que têm imagens geométricas, respetivamente, os pontos *B* e *H*.

8.2.1. Represente z_B na forma trigonométrica.

8.2.2. Mostre que $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$ é a representação de z_H na forma algébrica.

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ e w a raiz cúbica de z cujo afixo **pertence ao segundo quadrante**.

Escreva o número complexo $\frac{w \times \overline{z}}{\sqrt{2}\, z - i^{2019}}$ na forma algébrica.

FIM

COTAÇÕES

Questões	1.1	1.2	2	3	4	5	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	8.1	8.2.1	8.2.2	9	**Total**
Pontos	10	15	5	20	5	5	22	17	20	5	25	5	5	16	25	**200**

Soluções:

1.1. 4320 ; **1.2.** 5 ; **3.** $x \in \left]-\infty, \ln 2\right[\cup \left]\ln 3, +\infty\right[$; **6.1.** $k \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

6.2. $y=-4$, quando $x \to -\infty$ e $y = 0$, quando $x \to +\infty$; **6.3.** $f'(1) = -\frac{3}{2}$;

7.2. $\cap$: $\left]0, \frac{\pi}{6}\right]$ e $\cup$: $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$ e $\text{P.I:} \left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$; **8.2.1.** $z_B = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$; **9.** $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$.

xism@t.net

Professor: Carlos Manuel Lourenço