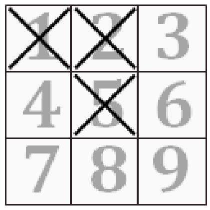
Prova Escrita de Matemática

12.º Ano de Escolaridade – Turma A

Duração da Prova : 100 minutos **VERSÃO 1** 27 de Maio de 2020

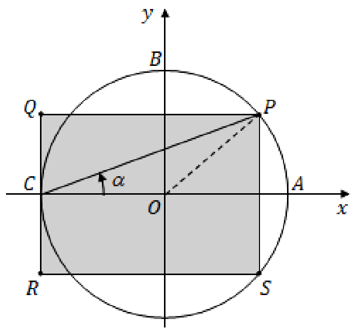
- **Para cada uma das questões de escolha múltipla:**
  - são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
  - escreva na sua folha de respostas **apenas** a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
  - se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Para cada uma das questões de resposta aberta:**
  - apresente analiticamente o seu raciocínio de forma clara, indicando os cálculos e todas as justificações necessárias.
  - quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se o valor exato.
  - utilize a calculadora apenas quando sugerido ou para efetuar eventuais cálculos.

1. Considere um tabuleiro quadrado, dividido em 3×3 casas quadradas iguais.
Selecionam-se, ao acaso, três das nove casas do tabuleiro.
Nas casas escolhidas é colocada uma cruz formada pelas diagonais dessa casa.
Qual é a probabilidade de pelo menos duas das cruzes ficarem na mesma linha ou na mesma coluna?



(A) $\frac{13}{14}$ **(B)** $\frac{6}{7}$ **(C)** $\frac{41}{42}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

2. Na figura, estão representados, em referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica e o retângulo $[PQRS]$.



Sabe-se que:

- os pontos A, B e C têm coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ e $(-1,0)$, respetivamente;
- o ponto P move-se sobre o arco AB;
- os pontos Q, R e S acompanham o movimento do ponto P de tal forma que os pontos Q e R têm sempre abcissa igual a -1 e o eixo Ox é sempre um eixo de simetria do retângulo $[PQRS]$.

Para cada posição do ponto P, seja α a amplitude, em radianos, do ângulo ACP, $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

2.1. Justifique que a amplitude, em radianos, do ângulo AOP é 2α.

2.2. Mostre que a área do retângulo $[PQRS]$, em função de α, é dada por:

$$A(\alpha)=2\sin(2\alpha)+\sin(4\alpha)$$

2.3. Determine, analiticamente, o valor de α para o qual a área do retângulo $[PQRS]$ é máxima.

3. A temperatura no interior de um frigorífico é constante.

Uma garrafa de bebida com temperatura de $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ é colocada nesse frigorífico.

Ao fim de 15 minutos, a temperatura da bebida é $18\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Para determinados números reais A e k, a temperatura dessa bebida, t minutos após ter sido colocada no frigorífico, pode ser modelada pela função $T(t)=4+A\mathrm{e}^{kt}$.

3.1. Mostre que $A=16$.

3.2. Mostre que, com arredondamento às milésimas, $k=-0{,}009$.

3.3. Na resolução das questões que se seguem, considere $A=16$ e $k=-0{,}009$.

3.3.1. Quanto tempo terá de decorrer para que a temperatura da bebida seja inferior a $10\,^{\circ}\mathrm{C}$? Apresente o resultado em horas e minutos com os minutos arredondados às unidades.

3.3.2. Se a bebida permanecer no frigorífico, com o decorrer do tempo, a sua temperatura tenderá para a temperatura a que se encontra o interior do frigorífico. Determine o valor dessa temperatura.

3.3.3. Verifique que $T'(t) = -\,0{,}009[T(t)-4]$ em que T' é a função **derivada** de T.

3.3.4. Determine $T'(60)$. Apresente o resultado arredondado às décimas e interprete-o no contexto da situação apresentada.

4. Para um certo número real k não nulo, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, é definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x-2x}{kx} & \text{se } x<0\\ x-2-x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

4.1. Determine o valor de k, sabendo que a função f é contínua.

4.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas quando $x\to+\infty$.

5. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=7.$

O $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{f(x)-f(2)}$ é igual a:

(A) $\dfrac{7}{4}$ **(B)** $-\dfrac{7}{4}$ **(C)** $\dfrac{4}{7}$ **(D)** $-\dfrac{4}{7}$

6. Seja z um número complexo cujo afixo pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{3}$.

Seja $w = |z|^2 + z - \overline{z}$.

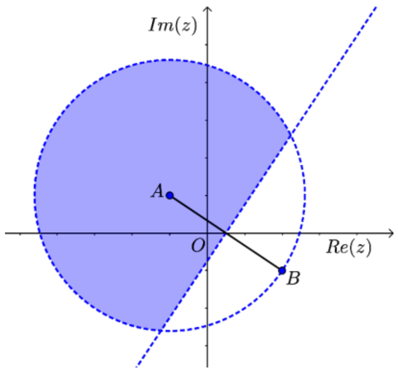
Sabe-se que $\text{Re}(w) \times \text{Im}(w) = 9$.

Qual é a parte imaginária do número complexo z?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{4}{3}$

7. Na figura ao lado, estão representados, no plano complexo:

- os pontos A e B, de coordenadas $(-1,1)$ e $(2,-1)$, respetivamente;
- o segmento de reta $[AB]$ e a sua mediatriz;
- a circunferência de centro A e raio $[AB]$.



Determine uma condição, em variável complexa, que defina o conjunto dos pontos representado a sombreado na figura, excluindo a fronteira.

FIM

COTAÇÕES

Questões	1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.3.4	4.1	4.2	5	6	7	**Total**
Pontos	8	6	12	28	6	15	15	12	10	6	24	24	8	8	18	**200**

Soluções:

2.3. $\alpha = \frac{\pi}{6}$; **3.3.1.** 1 *h* e 49 *m* (aprox.) ; **3.3.2.** $4°\text{C}$; **3.3.4.** $T'(60) \cong -0{,}1$;

4.1. $k = 1$; **4.2.** $m = 1$ e $b = -2$, $y = x - 2$ equação da assíntota oblíqua ;

7. $|z + 1 - i| < \sqrt{13} \ \wedge \ |z + 1 - i| < |z - 2 + i|$.

xism@t.net

Professor: Carlos Manuel Lourenço